4. CONCEPTO BASICOS DE PROBABILIDADES

Dr. Edgar Acuña

http://math.uprm.edu/~edgar

UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO
RECINTO UNIVERSITARIO DE MAYAGUEZ

4.1 Espacio Muestral y Eventos

4.1.1 Experimentos Aleatorios y Espacios Muestrales

Un experimento es una observación de un fenómeno que ocurre en la naturaleza. Tipos de experimentos:

Experimentos Determinísticos: Son aquellos en donde no hay incertidumbre acerca del resultado que ocurrirá cuando éstos son repetidos varias veces.

Experimentos Aleatorios: Son aquellos en donde no se puede anticipar el resultado que ocurrirá, pero si se tiene una completa idea acerca de todos los resultados posibles del experimento cuando éste es ejecutado.

4.1 Espacio Muestral y Eventos

Espacio Muestral: Es el conjunto de posibles resultados de un experimento aleatorio. Representaremos el espacio muestral S y cada elemento de él es llamado un punto muestral. Ejemplo:

Exp2: Lanzar un par de monedas y anotar el resultado que sale

Exp 5: Se anota el tiempo que hay que esperar para ser atendidos en un Banco

$$S_2 = \{CC, CX, XC, XX\} \qquad s_5 = \{t : t \geq 0\} \equiv [0, \infty)$$

Tipos de espacios muestrales:

Espacios muestrales discretos: Son espacios muestrales cuyos elementos resultan de hacer conteos, y por lo general son subconjuntos de los números enteros.

Espacios muestrales continuos: Son espacios muestrales cuyos elementos resultan de hacer mediciones, y por lo general son intervalos en la recta Real.

4.1.2. Eventos

Un **Evento** es un resultado particular de un experimento aleatorio. En términos de conjuntos, un evento es un subconjunto del espacio muestral. Por lo general se le representa por las primeras letras del alfabeto. Ejemplo:

A: Que salga un número par al lanzar un dado.

E: Que haya que esperar más de 10 minutos para ser atendidos.

Evento Nulo: Es aquél que no tiene elementos. Se representa por ϕ.

Evento Seguro: Es el espacio muestral que puede ser considerado como un evento.

4.1.3. Relaciones entre eventos

Unión de eventos: Dados dos eventos A y B de un mismo espacio muestral su unión se representa por $A \cup B$ y es el evento que contiene los elementos que están en A o en B, o en ambos. El evento ocurre si al menos uno de los dos eventos ocurre. Dada una colección $A_1, \ldots, A_n$ de eventos, su unión denotada por $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ ocurre si al menos uno de los $A_i, (1 \le i \le n)$ ocurre.

Intersección de eventos: Dados dos eventos A y B de un mismo espacio muestral su intersección se representa por $A \cap B$ y es el evento que contiene los elementos que están en A y B al mismo tiempo. El evento ocurre cuando los eventos ocurren simultáneamente. Dada una colección $A_1, \ldots, A_n$ de eventos, su intersección denotada por $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ ocurre si todos los eventos $A_i, (1 \le i \le n)$ ocurren a la vez.

4.1.3. Relaciones entre eventos

Evento Complemento: El complemento de un evento A se representa por $\overline{A}$ y es el evento que contiene todos los elementos que no están en A. El evento $\overline{A}$ ocurre si A no ocurre.

Propiedades de relaciones entre eventos: Sean A, B y C elementos de un mismo espacio muestral S entonces:

1) **Propiedad Conmutativa:** $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
2) **Propiedad Asociativa:** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3) **Propiedad Distributiva:** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4) **Leyes de De Morgan:** $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Todas estas propiedades se pueden aplicar a más de dos eventos.

4.2 Métodos de asignar Probabilidades

4.2.1 Método Axiomático: La Probabilidad es considerada como una función de valor real definida sobre una colección de eventos de un espacio muestral S que satisface los siguientes axiomas:

1. $P(S)=1$
2. Si A es un evento de S entonces $P(A)\geq 0$.
3. Si, A_i es una colección de eventos disjuntos (por pares) entonces $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$. Esta es llamada el axioma de aditividad contable. Asumiendo que $A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \phi$ se sigue del axioma 3 que $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$, ésta es llamada la propiedad de aditividad finita.

Propiedades de la probabilidad

$$P(\phi) = 0$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ejemplo 4.1.

Juan y Luis están solicitando ser admitidos en una universidad. La probabilidad de que Juan sea admitido es 0.7 y la probabilidad de que Luis sea admitido es 0.6. La probabilidad de que ambos sean admitidos es .45.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que solamente uno de ellos sea admitido?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de ellos sea admitido?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los dos sea admitido?

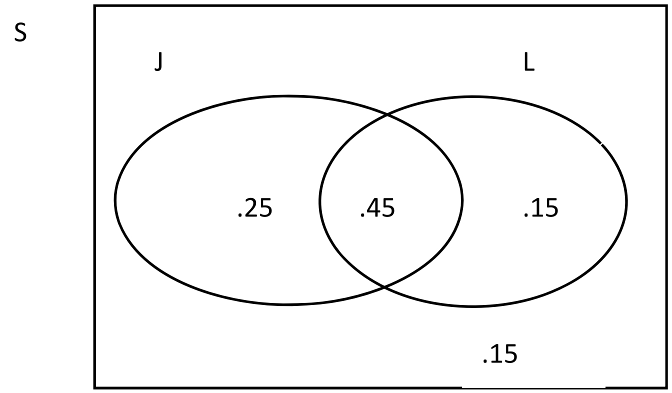


Diagrama de Venn para el ejemplo 4.1

	J	No J	
L	.45	.15	.6
No L	.25	.15	.4
	.7	.3	1.00

Tabla de clasificacion cruzada para el ejemplo 4.1

Ejemplo 4.2.

Una empresa tiene dos maneras *A* **y** *B* de presentar un nuevo producto al mercado. Si presenta el producto de la manera *A* la probabilidad de que el producto sea exitoso es 0.44 y si lo presenta de la manera *B* la probabilidad de éxito se reduce a 0.29. La probabilidad de que el producto fracase con ambas maneras de presentación es 0.37. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto sea exitoso con ambas formas de presentación?

Solución:

Los eventos son: ***A***: Que el producto sea exitoso con la manera *A* y ***B***: que el producto sea exitoso con la manera *B*. Tenemos que hallar $P(A \cap B)$

El problema puede ser resuelto aplicando la Ley de Morgan y la regla aditiva pero usaremos en su lugar diagramas de Venn y tabla de clasificacion cruzada.

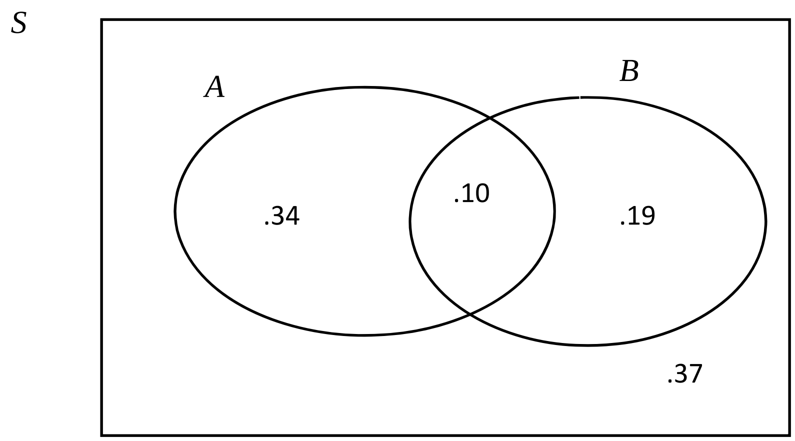


Diagrama de Venn para el ejemplo 4.2

	A	$\bar{A}$	
B	0.10	0.19	0.29
$\bar{B}$	0.34	0.37	0.71
	0.44	0.56	1.00

Tabla de clasificacion cruzada para ejemplo 4.2

4.2.2. Método Clásico

Un espacio muestral finito $S = \{w_1, ..., w_n\}$ se dice que es **Equiprobable** si cada uno de sus elementos tiene la misma probabilidad de ocurrencia, es decir para todo $P(w_i) = \frac{1}{n}$ $, i = 1, ..., n$

Ejemplo 4.4. Se lanza un par de dados legales y distinguibles, entonces su espacio muestral dado por:

$$S = \{(i, j) : i, j = 1,2,3,4,5,6\}$$

tiene 36 resultados, cada uno de ellos con probabilidad de ocurrencia 1/36.

4.2.2. Probabilidades- Método Clásico

Definición. Si un experimento aleatorio tiene un espacio muestral equiprobable S que contiene $\#(S)$ elementos y A es un evento de S que ocurre de $\#(A)$ maneras distintas entonces la probabilidad de ocurrencia de A es:

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(S)}$$

Ejemplo 4.6. ¿Cuál es la probabilidad de que salga suma mayor que 7 al lanzar un par de dados?

Solución:

El evento ***A***: Suma mayor que 7, incluye los resultados que dan suma 8, 9, 10, 11 ó 12 y éstos ocurren de 5, 4, 3, 2 y 1 maneras repectivamente. Luego $\#(A)=15$, por lo tanto $P(A)=15/36$.

4.2.3 Probabilidades-Método Frecuencial

Si un experimento se repite *n* veces y *n(A)* de esas veces ocurre el evento *A*, entonces la frecuencia relativa de *A* se define por $f_A = \frac{n(A)}{n}$.

Se puede notar que:

a) $f_S = 1$

b) $f_A \geq 0$

c) Si A y B son eventos disjuntos entonces $f_{A \cup B} = f_A + f_B$

Es decir satisface los axiomas de probabilidad.

Definición. La probabilidad del evento *A* es el valor al cual se aproxima f_A cuando el experimento se ha repetido un gran número de veces. O sea:

$$\frac{n(A)}{n} \rightarrow P(A)$$

4.2.5 Probabilidades-Método Subjetivo

Algunas personas de acuerdo a su propio criterio generalmente basado en su experiencia, asignan probabilidades a eventos, éstas son llamadas **probabilidades subjetivas**. Por ejemplo:

- La Probabilidad de que *llueva mañana* es 40%.
- La Probabilidad de que *haya un terremoto en Puerto Rico antes del 2000* es casi cero.
- La Probabilidad de que *el caballo Camionero gane el clásico del domingo* es 75%.

4.3 Probabilidad Condicional

Sean A y B dos eventos de un mismo espacio muestral S. La probabilidad condicional de A dado que B ha ocurrido esta dado por:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\#(A \cap B)}{\#(B)}$$

Ejemplo 4.11. Se lanza un par de dados legales y distinguibles. ¿Cuál es la probabilidad de que solamente uno de los dos dados sea par si se sabe que la suma de los dos es mayor que 8?

Solución:

Sean los eventos ***A***: Que solamente uno de los dos dados sea par y el evento condicionante ***B***: Que la suma sea mayor que 8. Claramente $\#(B)=10$ y $\#(A \cap B)=6$. Luego $P(A/B) = 6/10$.

Ejemplo 4.13

En una ciudad se hizo una encuesta acerca de la opinión de las personas adultas con respecto a una ley del gobierno. La siguiente tabla muestra los resultados de la encuesta clasificados según el sexo del entrevistado.

	A favor	En contra	Abstenidos	Total
Hombre	12	28	8	48
Mujer	10	15	12	37
Total	22	43	20	85

Se elige al azar una persona

a)¿Cuál es la probabilidad de que favorezca la ley si resulta ser mujer?

b)¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer si resulta estar en contra de la ley?

c)¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre si la persona elegida no se abstuvo de opinar?

4.3.1 Regla del Producto.

Dados los eventos A y B de un mismo espacio muestral, la probabilidad de que ambos ocurran esta dado por:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A)$$

Ejemplo 4.15. Según la Comisión Electoral de un país, el 90 por ciento de las esposas votan si sus esposos lo hacen, y el 20 por ciento vota si su esposo no lo hace. Además el 70 por ciento de los hombres casados votan. Se elige al azar un matrimonio. ¿Cuál es la probabilidad de que:

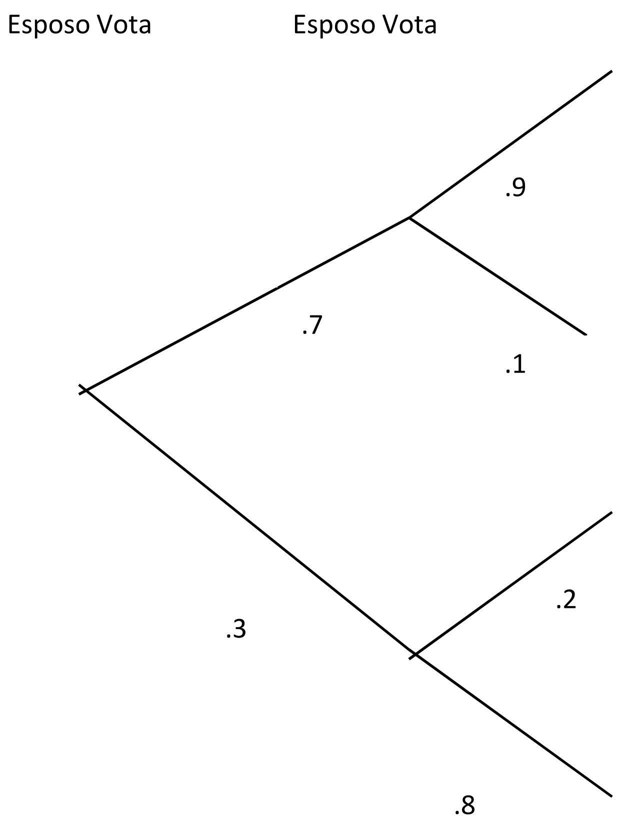
a) ambos esposos voten?

b) sólo uno de los esposos vote?

c) vote la esposa?

d) al menos uno de los esposos vote?

.



$P(V_1V_2)$=(.7)(.9)=.6.3

$P(V_1)$=(.7)(.1)=.07

$P(V_2)$=(.3)(.2)=.06

$P()$=(.3)(.8)=.24

4.3.2 Probabilidad Total y Regla de Bayes

Regla de la Probabilidad Total: Sean *B*1,…,*Bn* una *colección de eventos* que forman una *partición* del espacio muestral S esto es $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = S$ y $B_i \cap B_j = \phi$ *para i* $\neq$ *j*. Sea A otro evento definido sobre S entonces:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i)$$

Notar que: $A = A \cap S = A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} B_i)$. Aplicando la propiedad Distributiva: $A = \bigcup_{i=1}^{n} A \cap B_i$, la unión es disjunta, y y aplicando el tercer axioma: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i)$. Finalmente se aplica la regla del producto a cada término de la suma. Para una partición de S en dos eventos B y $\overline{B}$ se obtiene:

$$P(A) = P(B)P(A/B) + P(\overline{B})P(A/\overline{B})$$

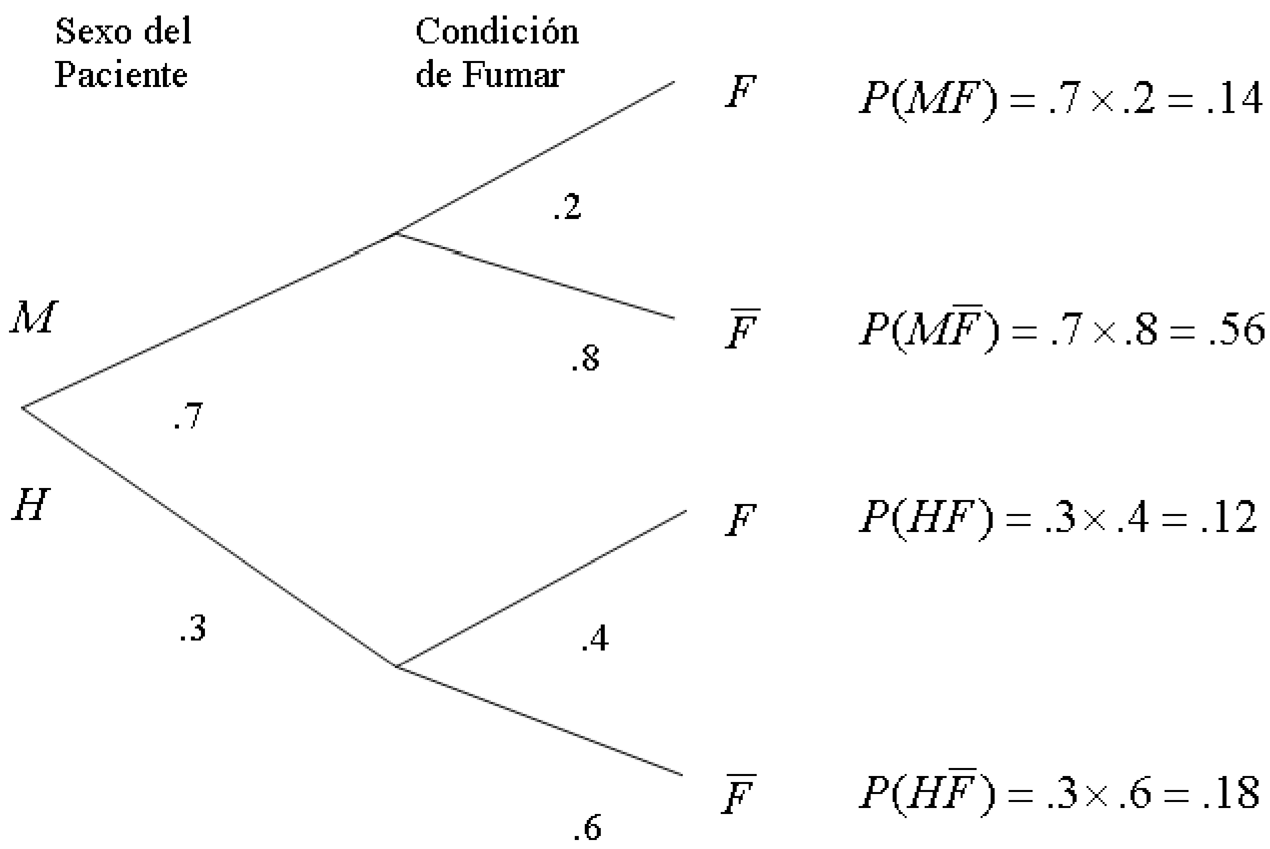
Ejemplo 4.17

El 70 % de los pacientes de un hospital son mujeres y el 20% de ellas son fumadoras. Por otro lado el 40 % de los pacientes hombres son fumadores. Se elige al azar un paciente del hospital. ¿Cuál es la probabilidad de que sea fumador?

Solución:

Sean los eventos *F*: Que el paciente sea fumador, *H*: Que el paciente sea hombre y *M*: Que el paciente sea mujer. Claramente, $P(F)=P(M)P(F/M)+P(H)P(F/H)$, luego se tiene: $P(M)=.7$, $P(H)=.3$ $P(F/M)=.2$ y $P(F/H)=.4$, sustituyendo estos valores en la fórmula anterior: $P(F)=.7\times.2+.3\times.4=.26$,

Diagrama de árbol para el ejemplo 4.17



La Regla de Bayes

Bajo las mismas condiciones de la regla de probabilidad total, se cumple que:

$$P(B_j / A) = \frac{P(B_j)P(A/B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i)}$$

Por definición de probabilidad condicional $P(B_j / A) = \frac{P(B_j \cap A)}{P(B)}$ y aplicando la regla del producto en el numerador y probabilidad total en el denominador se obtiene la regla de Bayes. La fórmula permite calcular facilmente probabilidades condicionales, llamadas probabilidades aposteriori siempre y cuando se conozca las probabilidades a priori $P(B_j)$, y las probabilidades condicionales $P(A/B_j)$

Ejemplo 4.21

Suponga que los chips de un circuito integrado son probados con cierto instrumento y la probabilidad de que se detecten los defectuosos es .99. Por otro lado hay una probabilidad de .95 de que un chip sea declarado como bueno si efectivamente lo es. Si el 1% de todos los chips son defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de que un chip que es declarado como defectuoso sea en realidad bueno?

Solución:

Sean los eventos M: Que el chip sea declarado defectuoso por el instrumento, D: Que el chip sea realmente defectuoso y B: Que el chip sea realmente bueno, entones se tiene: $P(M/D) = .99$ y $P(M/B) = 1 - .95 = .05$, además

que $P(B_1) = 1/3$, $P(R_1) = 2/3$, $P(R_2/B_1) = 3/6 = 1/2$ y $P(R_2/R_1) = 4/6 = 2/3$, se tiene que $P(R_2) = P(R_1)P(R_2/R_1) + P(R_1)P(R_2/R_1) = 22/36 = 11/18$, de donde sigue que $P(B_1/R_2) = (1/6)/(11/18) = 3/11 = .42$.

4.4 Eventos Independientes

Dos eventos A y B son independientes si la ocurrencia de uno de ellos no afecta la probabilidad de ocurrencia del otro. O sea:

$$P(A/B) = P(A) \text{ o } P(B/A) = P(B)$$

De la definición de probabilidad condicional se obtiene la siguiente definición equivalente:

Dos eventos A y B son independientes si:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Ejemplo 4.24

Un tirador hace dos disparos a un blanco. La probabilidad de que acierte en el blanco es .8, independientemente del disparo que haga. ¿Cuál es la probabilidad de que el tirador:

a) Acierte ambos disparos?

b) Acierte sólo uno de los dos disparos?

c) Acierte por lo menos un disparo?

d) No acierte ninguno de los dos disparos?

Solución:

Sean los eventos *Ai*: Que el tirador da en el blanco en el disparo *i* (*i* =1, 2). Por aplicación directa de la propiedad 5 se obtiene:

a) $P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = (.8)(.8) = .64$

b) $P(A_1\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1A_2) = P(A_1)P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)P(A_2) = (.8)(.2) + (.2)(.8) = .32$

c) $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) = (.8) + (.8) - (.64) = .96$

d) $P(\overline{A}_1\overline{A}_2) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2) = (.2)(.2) = .04$

4.5. Aplicación de técnicas de conteo al Cálculo de Probabilidades

4.5.1 Regla Multiplicativa del conteo: Si un experimento I ocurre de *m* maneras distintas y un experimento II ocurre de *n* maneras distintas entonces, el experimento compuesto de I seguido de II ocurre de maneras.

La regla multiplicativa se puede generalizar de la siguiente manera: Si un experimento compuesto de *k* experimentos simples, cada uno de los cuales se puede efectuar de $n_i, (1 \leq i \leq k)$ maneras distintas, entonces el experimento compuesto se puede efectuar de $n_1 \times n_2 \times ... \times n_k$ maneras distintas.

Ejemplo 4.28

Una contraseña para accesar a una computadora consiste de 36 caracteres que pueden ser letras (26) o números (10).

a) ¿Cuántas contraseñas distintas se pueden formar?

b) ¿Cuántas contraseñas distintas se pueden formar conteniendo sólo números?

c) ¿Cuántas contraseñas distintas se pueden formar si deben tener por lo menos una letra?

Solución:

a) $36 \times 36 \times 36 \times 36 \times 36 \times 36 = 36^6 = 2{,}176{,}782{,}336$

b) $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^6 = 1{,}000{,}000$

c) Por complemento, $36^6 - 10^6 = 2{,}175{,}782{,}336$

4.5.2 Permutaciones

Una permutación es un arreglo ordenado de objetos distintos. Por ejemplo, las permutaciones de tamaño 2 que se pueden hacer con las letras A, B y C son: AB, AC, BC, BA, CA y CB.

Haciendo uso de la regla multiplicativa del análisis combinatorio se desprende que:

i) El número de permutaciones de *n* objetos tomados todos a la vez está dado por

$$P(n,n) = n! = n(n-1)(n-2)\ldots 1$$

ii) El número de permutaciones de *n* objetos distintos tomados de *r* en *r* está dado por:

$$P(n,r) = n(n-1)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Recordar que 0! = 1.

Ejemplo 4.30

Ocho atletas compiten en la final olímpica de los 110 metros con vallas. Asumiendo que ellos cruzan la meta en distintos instantes. ¿Cuántas maneras distintas hay para entregar las medallas de oro, de plata y de bronce?

Solución:

El primer premio puede ser entregado de 8 maneras, el segundo de 7 y el tercero de 6, luego por la regla multiplicativa hay maneras distintas de entregar los premios. Claramente, esto es:

$$P(8,3) = \frac{8!}{5!}$$

4.5.3 Combinaciones

Una combinación es una selección de objetos donde el orden en que estos han sido escogidos no interesa. Por ejemplo, las combinaciones que se pueden hacer con los objetos: A, B y C elegidos de dos en dos son: AB, AC y BC. Observe que el número de permutaciones obtenidas anteriormente fue el doble.

El número de combinaciones de *n* objetos tomado de *r* en *r* está dado por:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{P(n,r)}{r!}$$

Como 0! = 1, se tiene que

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$

Ejemplo 4.36

Una señora tiene 8 amigas y desea invitar a 5 de ellas a una fiesta. ¿De cuántas maneras puede hacerlo si dos de ellas están enojadas entre si y no pueden ser invitadas juntas?

Solución:

Hay $\binom{6}{3} = 20$ invitaciones posibles donde las dos personas en disputa pueden ser invitadas juntas, y hay un total de $\binom{8}{5} = 56$ invitaciones que se pueden hacer.

Luego, usando complemento hay $56 - 20 = 36$ invitaciones donde las dos personas enemistadas no aparecen juntas.